Antikörperchallenge
SFZ Tuttlingen
21 April 2020

Niveau: Oberstufe
Aufgabe 7

Wir betrachten heute die Fibonacci-Zahlen:

$$(F_n)_{\in\mathbb{N}}: \quad F_1 := 1, \quad F_2 := 2, \quad F_n := F_{n-1} + F_{n-2} \ \ \forall n > 2$$

Teil Oberstufe

a) Beweise:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Beweise:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n} - 1$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

c) Beweise:

$$1 + \sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

d) Beweise die explizite Formel der Fibonacci-Folge.

Einsendeschluss an *gehirntraining@sfz-bw.de* bis zum 24. April 2020 um 18:00 Uhr.

Teil ÜFlie

e) Beweise, dass jede natürliche Zahl als Summe verschiedener Fibonacci-Zahlen dargestellt werden kann. Also, dass jedes $n \in \mathbb{N}$ darstellbar ist als $n = F_{i_1} + F_{i_2} + \cdots + F_{i_u}$ mit $u \in \mathbb{N}$ und $i_1 < i_2 < \cdots < i_u \in \mathbb{N}$.

f) Beweise, dass es so eine Darstellung auch gibt, und dass sie Eindeutig ist, wenn zusätzlich gefordert wird, dass $i_{k+1} - i_k \geq 2 \ \forall k < u$

g) Beweise, dass es so eine Darstellung auch gibt, und dass sie Eindeutig ist, wenn, statt den Forderungen von der vorherigen Aufgabe, gefordert wird, dass $i_{k+1} - i_k \leq 2 \ \forall k < u$ und $i_1 \leq 2$

Einsendeschluss an *gehirntraining@sfz-bw.de* bis zum 28. April 2020 um 18:00 Uhr.