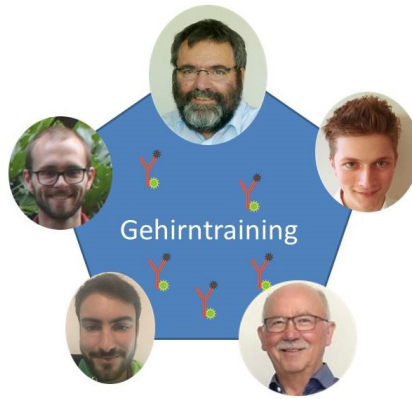


ANTIKÖRPERCHALLENGE
SFZ TUTTLINGEN
07. APRIL 2020



Niveau: Oberstufe/ÜFlie Aufgabe3

Betrachte ein Schachbrett der Größe $n \times n$. Das Schachbrett sei zu einem Torus zusammengeklebt, das heißt Figuren die das Feld am linken Rand verlassen treten am rechten wieder ein und umgekehrt. Das gleiche gilt für den oberen und den unteren Rand.

Die Springer-Distanz $s(x, y)$ zweier Felder sei nun die minimale Anzahl an Zügen, die ein Springer benötigt, um vom einen Feld aufs andere zu kommen.

Bei einem 8×8 -Torus wäre beispielsweise $s(e4, e4) = 0$, $s(d2, f3) = 1$, $s(e2, e4) = 2$. Nutzt man die Struktur des Torus aus, wäre allerdings auch $s(a4, g5) = 1$.

Der Springer-Durchmesser $S(n)$ eines Feldes ist nun das Maximum von $s(x, y)$ über alle beliebigen Felder x, y des $n \times n$ -Torus. Anschaulich betrachtet kommt man also in höchstens $S(n)$ Springerzügen von jedem Feld auf jedes beliebige andere auf dem Torus.

Teil I (Niveau: Oberstufe)

- (a) Berechne $S(4)$ und $S(8)$.
- (b) Entscheide ob folgende Aussage stimmt. Beweise sie, falls sie richtig ist; widerlege sie durch ein Gegenbeispiel, falls sie falsch ist:

Für alle $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \leq l$ gilt $S(k) \leq S(l)$.

Dies hieße anschaulich, dass man auf einem kleineren Torus immer höchstens so viele Züge benötigt wie auf einem größeren.

Einsendeschluss an gehirntraining@sfz-bw.de bis zum 10. April 2020 um 18:00 Uhr.

Teil II (Niveau: ÜFlie)

- (c) Zeige folgende (oder eine bessere) Abschätzung für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$2 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor \leq S(n) \leq 2 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 4$$

Hinweis: TEILE DEN TORUS IN KLEINERE GEEIGNETE UNTERKÄSTCHEN AUF.

Wenn du kannst, schränke den Bereich weiter ein oder finde sogar eine exakte Formel. (Wir haben bislang keine ...)

- (d) Suche eine vergleichbare Abschätzung zu (c) in drei (höheren) Dimensionen. Ein Springer zieht immer noch erst zwei Felder in eine der Koordinatenrichtungen, dann in eine beliebige der anderen.

Hinweis: AUCH IN HÖHEREN DIMENSION BLEIBT DIE GRUNDSTRUKTUR DER FORMEL UND DES BEWEISES ERHALTEN!

Einsendeschluss an gehirntraining@sfz-bw.de bis zum 14. April 2020 um 18:00 Uhr.